

**Διαγώνισμα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου**

**Ζήτημα 1<sup>ο</sup>**

Να χαρακτηρίσετε σαν Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις:

- i) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  είναι  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ .
- ii) Το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (-A, B)$ , είναι κάθετο στην ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$ .
- iii) Η ευθεία  $x = x_0$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 0$
- iv) Η εφαπτομένη του κύκλου με εξίσωση  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
- v) Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ , με  $\rho$  πραγματικό αριθμό, παριστάνει πάντα κύκλο.
- vi) Μια ευθεία  $\varepsilon$  εφάπτεται σε κύκλο  $C$  ο οποίος έχει κέντρο  $K$  και ακτίνα  $\rho$ , όταν ισχύει η σχέση:  $d(K, \varepsilon) = \rho^2$
- vii) Η  $y^2 = 4x$  παριστάνει παραβολή με εστία στο  $\psi\psi'$ .
- viii) Η εξίσωση  $\beta^2 x^2 + \psi^2 y^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$  με  $\alpha \cdot \beta \neq 0$  παριστάνει πάντα έλλειψη.
- ix) Ο κύκλος  $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6 = 0$  έχει ακτίνα 2.
- x) Δύο διανύσματα είναι αντίρροπα αν  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

**Ζήτημα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η σχέση  $(6 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{x} = (|\vec{\alpha}| - 2) \vec{y}$  και τα διανύσματα  $\vec{x}, \vec{y}$  δεν είναι συγγραμικά. Αν  $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$  με  $|\vec{u}| = 1$

- i) Να δείξετε ότι  $\text{syn}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{6}{2|\vec{\beta}|}$
- ii) Να βρείτε το  $|\vec{\beta}|$
- iii) Ποια σχέση συνδέει τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
- iv) Να βρείτε την γωνία των  $\vec{\alpha}, \vec{u}$

### Ζήτημα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η παραβολή  $C_1 : y^2 = 8x$ ,

- i) Να βρεθεί ο κύκλος  $C_2$  που έχει κέντρο την εστία  $E$  της παραβολής και διέρχεται από το σημείο  $A(4,0)$
- ii) Να βρεθεί η εφαπτομένη  $\varepsilon$  της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_1: y = x + 1$
- iii) Να δείξετε ότι η  $\varepsilon$  δεν τέμνει τον κύκλο  $C_2$  αλλά τέμνει την διευθετούσα της παραβολής στο σημείο τομής της  $\Gamma$  με τον  $\chi\chi'$ .
- iv) Να βρεθεί η έλλειψη με εστία την εστία της παραβολής και εκκεντρότητα  $\frac{1}{2}$

### Ζήτημα 4<sup>ο</sup>

Δίνονται οι σχέσεις :

$$x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2(\lambda + 2)y + 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0 \quad (2)$$

- i) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  που είναι παράλληλες,
- ii) Να βρεθεί η απόσταση των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  καθώς και η εξίσωση της μεσοπαράλληλου των,
- iii) Να αποδείξετε ότι η σχέση (2) παριστάνει κύκλο με σταθερή ακτίνα,
- iv) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της (2) βρίσκονται στην μεσοπαράλληλο των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ ,
- v) Να αποδείξετε ότι οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  εφάπτονται σε όλους τους κύκλους της (2)