

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ .  
Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$ ,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$ , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει  $f'(x) > 0$ ».

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$ , για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ .

**β)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται, αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .

**δ)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

**ε)** Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ . Αν υπάρχει κάποιο σημείο

$A(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$ , του οποίου η απόσταση από τον άξονα  $x'x$  είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι οριζόντια.

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ , με  $x > 0$ , αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι '1-1' και βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 8**

**B3.** Αν  $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , με  $x > 1$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

**B4.** Αν  $\varphi$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \lambda \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{με } \lambda > 0$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, 1)$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία ίση με  $\frac{\pi}{4}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

- Γ4. Ένα σημείο  $M(a, f(a))$ , με  $a \leq 0$ , κινείται στη γραφική παράσταση της  $f$ . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B$ . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $B$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία το σημείο  $M$  έχει τετμημένη  $-1$ .

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$ .

- Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0,1)$ , στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

**Μονάδες 7**

- Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right],$$

όπου  $x_0$  το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

**Μονάδες 6**

- Δ3. Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + x = x_0$  για  $x \in (x_0, 1)$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho$ .

**Μονάδες 5**

- Δ4. Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και  $\rho$  είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι  $f(x_0) > f(\rho)(f'(\rho) + 1)$  για κάθε  $k \in (\rho, 1)$ .

**Μονάδες 7**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, απόδειξη παρ. 1.8 σχολικό βιβλίο.

**A2.** Ορισμός, παράγρ. 2.2 σχολικό βιβλίο.

**A3.** (Λ)

*Αντιπαράδειγμα :* Η συνάρτηση  $f(x) = x^3$ , είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  αλλά  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$  στο  $\mathbb{R}$ .

**A4.** α)  $\rightarrow$  Λ, β)  $\rightarrow$  Σ, γ)  $\rightarrow$  Σ, δ)  $\rightarrow$  Σ, ε)  $\rightarrow$  Σ.

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**  $A_f = (1, +\infty)$ ,  $A_g = \mathbb{R}$

Η  $f \circ g$  ορίζεται στο σύνολο

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ ώστε } g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ ώστε } e^x > 1\} = (0, +\infty).$$

Ο τύπος της είναι:  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ ,  $x > 0$ .

**B2.** Έστω  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ :  $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 2)(e^{x_1} - 1) \Rightarrow e^{x_1 x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_1 x_2} - e^{x_2} + 2e^{x_1} - 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3e^{x_1} = 3e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$

Οπότε η  $f \circ g$  είναι 1-1 άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση:

$$(f \circ g)^{-1} : (f \circ g)((0, +\infty)) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y+2 \quad (1)$$

$$\text{Αν } y=1 \quad \eta(1) \Leftrightarrow 0e^x = 3 \text{ αδύνατη, άρα } 1 \notin (f \circ g)((0, +\infty))$$

$$\text{Αν } y \neq 1 \quad \eta(1) \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1}.$$

$$\text{Πρέπει } \frac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y < -2 \quad \eta \quad y > 1 \quad (2)$$

και

$$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \text{ αλλά } x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1 \quad (3)$$

Από (2), (3) τελικά  $y > 1$

$$\text{Έτσι: } \varphi(x) = (f \circ g)^{-1} = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \quad x > 1$$

**(Δεύτερος τρόπος) :** Μελετάμε τη μονοτονία της συνάρτησης  $f \circ g$  με τη βοήθεια της παραγώγου (προκύπτει γνησίως φθίνουσα) και βρίσκουμε ως σύνολο τιμών της το διάστημα  $((\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)) = (1, +\infty)$ .

$$\mathbf{B3.} \quad \text{Για } x > 1: \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)' = \frac{x-1}{x+2} \frac{-1 - \frac{x+2}{x-1} \cdot (-1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)^2} < 0$$

Άρα  $\varphi$  γνησίως φθίνουσα στο  $(1, +\infty)$ .

$$\mathbf{B4.} \quad \lim_{x \rightarrow +1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0.$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1** Η  $f$  συνεχής στο  $(-\infty, 0)$  ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών.

Η  $f$  συνεχής στο  $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  ομοίως ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών.

Αφού είναι συνεχής η  $f$  πρέπει να είναι συνεχής και στο  $x_0 = 0$ .

Άρα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = 1 - \ln \lambda \Leftrightarrow 1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda = 1 - \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi(x) = \ln x + x - 1$ ,  $x > 0$  με

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \varphi \text{ γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty). \text{ Από (1) είναι}$$

$$\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1) \stackrel{\varphi \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \stackrel{\varphi(1-1)}{\lambda = 1} \lambda = 1.$$

**Γ2** Είναι  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$\text{Για } x < 0: \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1 - 1 + x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$\text{Για } x > 0: \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Άρα η εφαπτόμενη στο  $A(0,1)$  έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

Αν  $\omega$  η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα  $xx'$  είναι:

$$\varepsilon \varphi \omega = f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \quad (\omega \in [0, \pi))..$$

**Γ3.** Για  $x < 0$ :  $f'(x) = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$\text{Για } x > 0: f'(x) = (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)' = \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x, & x > 0 \end{cases}$$

Για  $x \leq 0$  είναι  $f'(x) > 0$ .

Για  $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ :  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = \sin x$

$$\stackrel{\sin x \neq 0}{\Leftrightarrow} \epsilon \phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4} \text{ αφού } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Επειδή λοιπόν η  $f'$  ορίζεται στο  $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$  και  $f'(x) = 0$  στα  $x = \frac{\pi}{4}$  και  $x = \frac{5\pi}{4}$ , αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία.

**Γ4.** Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $M(a, f(a))$  είναι  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ .

$$\text{Για } y = 0 \Rightarrow -f(a) = f'(a)x - af'(a) \Leftrightarrow x = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα  $x'x$  είναι

$$B\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$$

$$\text{Επομένως } x_B = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{1}{\frac{1}{a - \frac{1}{1-a}}} = a - \frac{1}{1-a} = a - (1-a) = 2a - 1.$$

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t$  είναι:

$$x_B(t) = 2a(t) - 1 \Rightarrow x'_B(t) = 2a'(t) \Rightarrow x'_B(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) \Rightarrow x'_B(t) = -\frac{2}{3}a(t) \quad (1)$$

Όμως ισχύει  $a(t_0) = -1$

Από (1) για  $t = t_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) \Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3} \quad \frac{\text{μονάδα μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι:

$$f'(x) = e^x + 2x - e \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = e^x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$$

$f''(x) > 0$  στο  $\mathbb{R}$  άρα  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

Η  $f'$  στο  $[0, 1]$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αφού

$$f'(0) = 1 - e < 0$$

$$f'(1) = 2 > 0$$

Άρα υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$ :  $f'(x_0) = 0$

Το παραπάνω είναι μοναδικό στο  $\mathbb{R}$  αφού  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Έτσι

$$x < x_0 \stackrel{f' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$x_0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$					

$\swarrow$   $\searrow$   
 $\min: f(x_0)$

Έχουμε:

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 \quad (1)$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad (2)$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

**Δ2.** Από (Δ1) για  $x \neq x_0$  είναι  $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$  λόγω συνέχειας της  $f$  στο  $x_0$ .

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty \quad (3)$$

Ακόμη για  $x \neq x_0$  είναι:

$$\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \quad (4)$$

$$\text{Από (3)} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right] = +\infty$$

**Δ3** Έστω  $\varphi(x) = f(x) + x - x_0$ ,  $x \in [x_0, 1]$

Η  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[x_0, 1]$  ως άθροισμα συνεχών.

- $\varphi(x_0) = f(x_0)$

Όμως  $x_0 < 1 \stackrel{(\Delta_1)}{\Rightarrow} f(x_0) < f(1) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0) < 0$

- $\varphi(1) = f(1) + 1 - x_0 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει  $\rho \in (x_0, 1)$

Ωστε:  $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho - x_0 = 0$

Η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική στο  $[x_0, 1]$

Αφού  $\varphi'(x) = f'(x) + 1 > 0$  στο  $[x_0, 1]$

$\Rightarrow \varphi$  γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, 1]$ .

**Δ4.** Είναι  $f(\rho) + \rho = x_0$  με  $\rho \in (x_0, 1)$  και  $x_0 \in (0, 1)$

Έχουμε για  $\kappa \in (\rho, 1)$ :

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) > f(\rho)f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) \quad (5)$$

Η  $f$  στο  $[x_0, \rho]$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει

$$\xi \in (x_0, \rho): f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \quad (6)$$

$$(5) \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa)$$

Ισχύει αφού  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και  $\xi < \rho, \kappa \in (\rho, 1)$ .

**Δ4.** (2ος τρόπος)

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho)f'(\kappa) - f(\rho) \Leftrightarrow$$

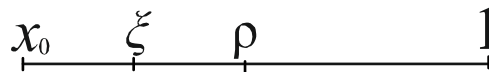
$$f(x_0) - f(\rho)f'(\kappa) - f(\rho) > 0$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x_0) - f(\rho)f'(x) - f(\rho) \quad \text{με } x \in [\rho, 1]$$

είναι  $\varphi(x) > 0$ .

Στο  $[x_0, \rho]$  από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον



$$\xi \in (x_0, \rho): f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) = f'(\xi)(x_0 - \rho).$$

Από το Δ3, είναι

$$f(\rho) + \rho = x_0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho < 0.$$

$$\text{Άρα } \varphi(x) = f'(\xi)(x_0 - \rho) - (x_0 - \rho)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(x))$$

Είναι

$$\varphi'(x) = (x_0 - \rho)(-f''(x)) > 0, \quad \text{αφού } x_0 - \rho < 0$$

και  $f''(x) > 0 \Rightarrow \varphi$  γνησίως αύξουσα στο  $[\rho, 1]$ .

$$\text{Άρα } \rho < x < 1 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(\rho) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(\rho)) \quad (1)$$

$$\text{Αφού } \xi < \rho \stackrel{f'' > 0}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(\rho) \Rightarrow f'(\xi) - f'(\rho) < 0$$

$$\text{και } x_0 - \rho < 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \varphi(x) > \varphi(\rho) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0.$$