

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΠΑ.Λ. Α΄ & Β΄
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σελ 138 σχολικού βιβλίου.

A2. $\alpha \rightarrow \Sigma, \beta \rightarrow \Lambda, \gamma \rightarrow \Lambda, \delta \rightarrow \Lambda, \varepsilon \rightarrow \Sigma$.

A3. α) $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} \sin x \, dx = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$xf(x) - 2f(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)f(x) = x^2 - 4.$$

Για $x \neq 2$ προκύπτει $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

B2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2 + 2 = 4$.

B3. Επειδή η f είναι συνεχής το \mathbb{R} , θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$. Έτσι πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2) \Leftrightarrow f(2) = 4.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

A/A	Ηλικίες υπαλλήλων	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i v_i$	Σχετική συχνότητα f_i %
1 ^η κλάση	[25, 35)	100	30	3.000	50
2 ^η κλάση	[35, 45)	50	40	2.000	25
3 ^η κλάση	[45, 55)	40	50	2.000	20
4 ^η κλάση	[55, 65)	10	60	600	5
ΣΥΝΟΛΑ		$v = 200$		7.600	100

Γ2. Η μέση ηλικία των υπαλλήλων είναι

$$\bar{x} = \frac{3000 + 2000 + 2000 + 300}{200} = \frac{7600}{200} = 38.$$

Γ3. Το ποσοστό των υπαλλήλων με ηλικία τουλάχιστον 45 ετών είναι:

$$20 + 5 = 25\%.$$

Γ4. Μετά τις μετακινήσεις των υπαλλήλων προκύπτει ο επόμενος πίνακας

A/A	Ηλικίες υπαλλήλων	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i v_i$	Σχετική συχνότητα f_i %
1 ^η κλάση	[25, 35)	110	30	3.300	50
2 ^η κλάση	[35, 45)	45	40	1.800	25
3 ^η κλάση	[45, 55)	40	50	2.000	20
4 ^η κλάση	[55, 65)	5	60	300	5
ΣΥΝΟΛΑ		$v = 200$		7.400	100

Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\bar{y} = \frac{110 \cdot 30 + 45 \cdot 40 + 40 \cdot 50 + 5 \cdot 60}{200} = \frac{7400}{200} = 37.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα αντίστοιχα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι:

$$f'(x) = [e^x \cdot (x-1)]' = (e^x)'(x-1) + e^x(x-1)' = e^x \cdot (x-1) + e^x = f(x) + e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Είναι

$$f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x x - e^x + e^x = x \cdot e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ αφού } e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x > 0 \Leftrightarrow x > 0, \text{ αφού } e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x < 0 \Leftrightarrow x < 0, \text{ αφού } e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	○	+
f			

\nwarrow \nearrow
 τ. min
 $f(0) = -1$

Επομένως:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$, το $f(0) = -1$.

Σημ. Το τοπικό ελάχιστο που βρέθηκε είναι και ολικό ελάχιστο για την f .

Δ3. Μελετάμε το πρόσημο της συνάρτησης

$$g(x) = f(x) + e^x = e^x(x-1) + e^x = xe^x - e^x + e^x = xe^x, x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι $g(x) = f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ αφού } e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x > 0 \Leftrightarrow x > 0, \text{ αφού } e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x < 0 \Leftrightarrow x < 0, \text{ αφού } e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι έχουμε ότι:

$$g(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [-1, 0] \text{ και } g(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\begin{aligned} E &= -\int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = -\int_{-1}^0 xe^x dx + \int_0^1 xe^x dx = \\ &= -\int_{-1}^0 x(e^x)' dx + \int_0^1 x(e^x)' dx = -[xe^x]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^x dx + [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \\ &= -[xe^x]_{-1}^0 + [e^x]_{-1}^0 + [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = \\ &= -[0 + e^{-1}] + [e^0 - e^{-1}] + [e^1 - 0] - [e^1 - e^0] = \\ &= -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - e + 1 = 2 - \frac{2}{e} \quad \tau.μ. \end{aligned}$$